

Pourquoi et comment fait-on de la recherche en mathématique?

Yves Meyer

29 septembre 2001

1. Mathématiques, révoltes et libertés (1952-1956).

J'avais 5 ans quand la Seconde Guerre mondiale s'est terminée et 15 ans quand la guerre d'Algérie a été déclenchée. La guerre d'Algérie a duré 7 ans.

J'ai commencé à aimer les mathématiques à l'âge de 13 ans environ. C'était à Tunis où j'ai passé mon enfance.

L'Afrique du Nord était alors encore une colonie française, mais le Maroc, la Tunisie et l'Algérie commençaient à lutter pour obtenir leur indépendance. La réponse de la France aux demandes des nationalistes était souvent une répression brutale et quelquefois l'amorce d'un dialogue.

J'étais un enfant révolté et je sentais au fond de moi que les arguments en faveur du colonialisme n'étaient que des mensonges. Beaucoup d'adultes acceptaient l'injustice et l'ordre établi. Je ne leur faisais pas confiance et j'ai alors conclu que l'on ne peut trouver la vérité en écoutant les autres.

Découvrir la vérité par moi-même est ainsi devenu un besoin. Je ne savais pas que c'est impossible en dehors du domaine restreint des mathématiques.

Voici ce que je croyais:

Si un problème est aujourd'hui trop difficile pour moi, je finirai cependant par en trouver la solution, car un amour sincère, lucide et anxieux de

la vérité permet d'accéder à la connaissance.

Les problèmes de géométrie m'apportaient un plaisir double. Je pouvais d'abord vérifier, en faisant une belle figure, en dessinant, que les neuf points que l'on m'avait demandé de construire étaient situés sur un même cercle, comme on me l'annonçait. Il fallait ensuite prouver qu'il en est bien ainsi. Le bonheur intellectuel de trouver une démonstration élégante se mêlait au plaisir procuré par la beauté de l'image.

En physique ou dans les sciences expérimentales, la connaissance me semblait s'apparenter à une forme de croyance, puisque je ne pouvais contrôler ou vérifier par moi-même ce que disait le maître. Il utilisait sans cesse des arguments d'autorité que je détestais. Par exemple, il disait que Michelson et Morley ont fait telle expérience et obtenu tel résultat. On ne pouvait reproduire cette expérience et il me semblait aussi sot de croire en Michelson que de croire aux sorcières.

En mathématique, il y a une totale égalité entre le maître et l'élève. Je peux prouver, par la force et la justesse de mon argumentation, que le maître se trompe.

Les mathématiques signifiaient donc la liberté (de penser par moi-même) et l'égalité (avec le maître).

La fraternité entre chercheurs, il me faudra attendre bien des années pour la découvrir.

2. La recherche en mathématiques

Les enfants résolvent les problèmes posés par les professeurs. Ce faisant, ces enfants sont des chercheurs. Mais ils n'ont pas ajouté une pierre nouvelle à l'édifice des mathématiques, car le professeur savait déjà la solution. Le métier du chercheur consiste à découvrir ce que personne ne savait auparavant. Ces enfants, devenus adultes, ont-ils le droit de consacrer leur vie à une activité qui semble aussi puérile? Qui leur dira quels problèmes résoudre? Un chercheur en mathématique est-il un enfant qui a refusé de vieillir?

S'il est vrai que l'on peut, en mathématique, démêler le vrai du faux grâce

à ses propres ressources, la question suivante est: où, dans quelle direction, doit-on diriger ses efforts?

André Weil était l'ami de Jean Delsarte. A la mort de Delsarte, André Weil a rendu hommage à l'œuvre scientifique de son ami. Delsarte, nous dit André Weil, définissait lui-même, en toute liberté et indépendance, ses thèmes de recherche.

J'ai fait de même et ai décidé moi-même, sans consulter personne, quel serait le sujet de ma thèse. De mon temps, la thèse était le résultat de cinq ans d'efforts et de découvertes. La thèse est, encore aujourd'hui, le premier combat et la première victoire dans la vie d'un chercheur.

Montaigne (1533-1592) insiste, au contraire, sur la solidarité qui unit les chercheurs et décrit, dans ses "Essais", la chaîne humaine qui fait avancer la science.

Ce que ma force ne peut découvrir, je ne laisse pas de le sonder et essayer et, en retastant et pétrissant cette nouvelle matière, la remuant et l'eschaufant, j'ouvre à qui me suit quelque facilité.

Autant en fera le second au tiers qui est cause que la difficulté ne me doit pas désespérer, ni aussi peu mon impuissance...

La recherche en mathématique me semble aujourd'hui être une œuvre collective. Mes efforts, mes découvertes, n'ont de sens que s'ils prolongent ou complètent le travail d'un autre mathématicien. Cela conduit à admettre l'existence d'un mystérieux chef d'orchestre qui dirige "du haut du ciel" le travail des chercheurs. Comme Jean-Pierre Serre le remarquait avec tristesse, lors d'un exposé à l'Académie des Sciences, le théorème qui fournit la liste complète des groupes finis simples est une œuvre collective de plus de 6000 pages qu'aucun mathématicien ne pourra jamais lire dans son intégralité (un groupe fini G est simple s'il ne contient aucun sous groupe H tel que G/H soit un groupe). Dans ce cas, le mystérieux chef d'orchestre a été XYZ.

3. Alberto Calderón

C'est en 1974 environ que j'ai renoncé à mon orgueilleuse indépendance. Pendant une dizaine d'années (1974-1983), j'ai accepté d'être le disciple de Calderón. Mais pour devenir le disciple d'un maître, encore faut-il que ce maître vous accueille. Calderón m'a accueilli et m'a dévoilé son programme de recherche. Ce programme consistait à construire de nouveaux opérateurs qui allaient révolutionner l'analyse complexe et les équations aux dérivées partielles. Calderón me laissait entrevoir le nouveau monde qu'il se proposait de découvrir et d'explorer à l'aide de ces opérateurs. Les opérateurs sont aussi utiles aux mathématiciens que les moteurs électriques le sont aux ingénieurs.

Mais pour que le programme de Calderón fonctionne, il fallait ouvrir une porte magique. Cette porte restait fermée, verrouillée, et nul ne pouvait pénétrer dans le monde enchanté évoqué par Calderón. Cette porte magique avait un nom: la continuité du noyau de Cauchy pour les courbes Lipschitziennes. En mai 1981, après sept ans d'efforts, j'ai fini par comprendre comment la porte s'ouvrait. Aujourd'hui cette porte s'ouvre encore plus facilement grâce aux travaux de Joan Verdera, de l'Univeristé Autònoma de Barcelone. Pendant ces sept années, j'ai appris à travailler en équipe et l'assaut final a bénéficié de l'aide de mes amis Ronald Coifman et Alan McIntosh. C'est ainsi que j'ai compris que la fraternité joue un rôle essentiel dans la recherche scientifique.

Alberto Calderón me traitait en ami et je l'aimais. Je ne faisais aucun mystère de mes opinions politiques. Les siennes étaient différentes. Mais j'aimais ses critiques. Par exemple, il détestait Atahualpa Yupanqui et, avec son amabilité usuelle, il m'expliquait les raisons de son désaccord. Il m'a fait découvrir les poèmes de Jorge Luis Borges et, en particulier, le "Poema de los dones" qui commence ainsi

*Nadie rebaje a lágrima o reproche
Esta declaración de la maestría
De Dios, que con magnífica ironía
Me dio a la vez los libros y la noche.*

Alberto Calderón m'a fait comprendre les méfaits du peronisme. Calderón était pudique. Il lui arrivait cependant de se laisser aller à la nostalgie et

d'évoquer ses promenades dans le Buenos Aires de sa jeunesse.

En juin 1998, l'université Autonoma de Madrid a tenu à lui rendre un dernier hommage. J'ai eu le bonheur de revoir Alberto Calderón à cette occasion.

4. Les mathématiques et la connaissance scientifique.

Nicolas Bourbaki est le nom d'un petit groupe de mathématiciens français. Bourbaki a cherché à développer la rigueur, la cohérence et l'unité des mathématiques. Henri Poincaré était montré du doigt comme le "mauvais élève", car, dans son œuvre, il arrivait que les hypothèses d'un théorème soient modifiées au cours de la démonstration...

Bourbaki, malgré sa critique injuste de l'œuvre de Poincaré, a renforcé l'unité des mathématiques. Mais Bourbaki a aussi élargi le fossé séparant les mathématiques de la physique.

Comme je l'ai dit plus haut, la physique m'inspirait une grande méfiance. Ce n'est qu'en 1985 environ que j'ai changé d'avis et que j'ai perçu l'unité des sciences.

Cette vision nouvelle, je la dois à Alex Grossmann et à Jean Morlet. Le premier est un spécialiste de Mécanique Quantique. Le second était un ingénieur. Grossmann et Morlet travaillaient dans le cadre de la recherche pétrolière et, plus précisément, de la vibrosismique. Ils ont commencé par redécouvrir une identité remarquable qui avait été trouvée par Alberto Calderón vingt ans avant. Mais ils ont fait bien plus. Ils ont compris que cette identité fournit un nouveau langage permettant de décrire les signaux et les images. Ingrid Daubechies, Stéphane Mallat et moi allions inventer les algorithmes numériques rapides qui permettront d'intégrer la vision de Jean Morlet dans ce que l'on appelle aujourd'hui la révolution numérique. Les résultats de ces recherches permettent d'accélérer la transmission des images sur le web, mais s'appliquent aussi à l'imagerie médicale. Les opérateurs que j'avais créés en suivant le programme lancé par Alberto Calderón jouent aujourd'hui un rôle essentiel dans la révolution numérique.

Dans cet exemple, les mathématiciens ont suivi la voie tracée par les physi-

ciens. Mais il y a aussi des exemples en sens inverse et les mathématiciens sont parfois des prophètes. Ils ne sont pas isolés du monde qui les entoure, même s'ils le croient. Ils annoncent le monde à venir.

Voici un exemple de cette capacité divinatoire des mathématiques.

En 1969, alors que j'étais professeur à l'Université de Paris-Sud, je me suis attaché à résoudre un problème mathématique difficile, posé par Raphaël Salem.

C'est à cette occasion que j'ai inventé configuration géométrique remarquable qui est une nouvelle façon de disposer des petits cailloux dans un plan. Ce faisant j'avais découvert les quasicristaux, dix ans avant qu'ils ne soient trouvés dans la nature, en chimie. Les petits cailloux figurent les emplacements des atomes. Les quasicristaux sont aujourd'hui bien plus importants que le problème posé par Salem, car ce sont des arrangements moléculaires nouveaux, ayant des propriétés physiques remarquables.

5. Les mathématiques et la peine des hommes

Barbara Weiss (la femme du mathématicien Guido Weiss) me voyait, un soir du mois de mai 1981, travailler avec acharnement sur un problème posé par son mari. Elle m'a dit:

“Yves, si au lieu de travailler sur ces mathématiques qui ne servent à rien, tu utilisais ton intelligence à alléger la souffrance des hommes, les choses iraient un peu moins mal sur cette terre.”

Ce reproche m'a blessé, mais j'ai continué mon travail mathématique et, deux jours après, j'avais résolu le problème posé.

Aujourd'hui, après tant d'années, je ne sais toujours pas répondre aux critiques de Barbara Weiss.

Une réponse un peu facile et mensongère serait la suivante. Oui, j'ai pu alléger la souffrance des hommes. En effet, grâce au travail de tout un groupe de chercheurs et de médecins, les nouvelles méthodes de traitement de l'image qu'Ingrid Daubechies, Stéphane Mallat et moi avons découvertes s'appliquent à de nombreux problèmes posés par l'imagerie médicale.

Mais cette réponse est mensongère, car ce que j'attends de mon travail de mathématicien est de retrouver le mélange de peur, d'excitation et de joie qu'un enfant ressent en cherchant le trésor enfoui dans l'île mystérieuse.