Los Conjuntos de Julia y Mandelbrot

Ismael

Introducción

Tengo dos objetivos al realizar este trabajo: ser matemáticamente lo más riguroso posible y que se pueda experimentar sin tener que aprender matemáticas más avanzadas. Es difícil equilibrar estos dos objetivos, seguramente en algunos párrafos hacen falta más demostraciones y en otros las cuentas son demasiado pesadas. Espero que sepan perdonar mis errores y disfruten de esta introducción a los conjuntos de Julia y Mandelbrot.

Debido a la naturaleza del tema, es un requisito necesario el conocimiento de las operaciones básicas con números complejos. Salvando este "pequeño" requerimiento, los demás conocimientos necesarios los citaré a medida que los utilice y trataré de dar bibliografía adecuada en cada caso.

Buenos, vamos a empezar con:

Sistemas Dinámicos

No voy a pretender dar una explicación rigurosa de este tema, sino sólo mostrar cuál es la motivación del origen de los conjuntos de Julia y Mandelbrot.

Los sistemas dinámicos tienen su origen al estudiar los problemas de evolución. Con un ejemplo me parece que se va a entender la idea.

Ejemplo 1: Supongamos que la función $f(x) = \lambda x^2$ modela la evolución de una población al cabo de un año. Esto es, si tenemos una población inicial de x individuos, al cabo de un año la población será de $f(x)$ individuos. Entonces al cabo de n años vamos a tener una población de $\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n}(x) = f^n(x)$ individuos.

En general nos van a interesar dos problemas: Fijado el parámetro λ, cuál sería la evolución de una población inicial, al cabo de n años; o fijada la población inicial de x_0 individuos, en qué manera afecta el parámetro λ a la evolución de la población.

Ejemplo 2: Siguiendo el ejemplo anterior fijemos $\lambda = 1$, entonces resulta que $f^n(x) = x^{2^n}$. Tenemos varias alternativas en la evolución del sistema:

- Si $0 \le x_0 < 1$, la población disminuye a medida que transcurre el tiempo, esto es $x_0^{2^n} \to 0$.
- Si en cambio $1 < x_0$, la población aumenta de manera exponencial, esto es $x_0^{2^n} \to \infty$.

- En el caso en que $x_0 = 1$, la población permanece estable.

Este modelo es bastante simple y sencillo, pero no es demasiado realista. Otros modelos más reales, muestran un comportamiento mucho más complicado. Un ejemplo de esta clase de modelos es la función *logística* $f(x) = \lambda x(1-x)$, que en apariencia es apenas un poco más complicada que el ejemplo precedente, pero su comportamiento es bastante más complicado. El estudio del comportamiento de ésta dio origen al famoso conjunto de Mandelbrot, que veremos más adelante.

Antes de seguir, vamos a definir algunas cosas que nos van a resultar útiles más adelante. Sea $f : C \to C$ una función que modela la evolución de un sistema. Dentro del estudio de los sistemas dinámicos nos va a interesar aquellos subconjuntos de C que permanezcan invariantes por la acción de f; se dicen *invariantes* en general y los podemos clasificar en:

- Si $f(G) = G$, entonces G se dice *invariante hacia adelante*.
- Si $f^{-1}(G) = G$, entonces G se dice *invariante hacia atrás*.
- Si G cumple ambas propiedades se dice *invariante hacia atrás y hacia adelante*.

Vista esta pequeña introducción a los sistemas dinámicos, podemos pasar a:

El conjunto de Julia

En esta parte nos vamos a limitar a estudiar los polinomios $f : C \to C$ (aquí C son los complejos). Un polinomio es una expresión del tipo $f(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$, donde los a_i son números complejos. Muchas de las definiciones y de los teoremas que se presentan pueden darse en un contexto más general, ver por ejemplo [Beardon].

Sea w un número complejo tal que $f(w) = w$, en ese caso se dice que w es un *punto fijo* de f. Sea ahora w tal que $f^p(w) = w$, para algún $p \geq 1$, en ese caso se dice que w es un *punto periódico* de f; si además p es el menor número natural con esta característica, se dice que w es un punto p*-periódico*.

Los *puntos periódicos* se pueden clasificar, según $\lambda = \left|(f^p)'(x)\right|$:

- Si $\lambda > 1$, se dice que w es un *punto repelente*.
- Si $\lambda = 1$, se dice que w es un *punto indiferente*.
- Si $0 < \lambda < 1$, se dice que w es un *punto atractivo*.
- Si $\lambda = 0$, se dice que w es un *punto superatractivo*.

Entonces, ahora podemos definir el conjunto el *conjunto de Julia* de f como:

$$J(f) = cl\{z \in C / z \text{ es un punto periódico repelente}\}$$

Aquí $cl(A)$ quiere decir la clausura del conjunto A, pueden consultar la definición de clausura en algún libro de topología, por ejemplo “Topología” de J. R. Munkres.

El conjunto de Julia tiene ciertas propiedades:

- Es no vacío.
- Es un conjunto invariante hacia adelante y hacia atrás.

- Es acotado y cerrado.
- Tiene interior vacío y no tiene puntos aislados (se dice perfecto).

Las demostraciones de estas propiedades se pueden consultar en [Falconer].

Cuando las funciones en la que estemos trabajando no sean los polinomios, estas propiedades no necesariamente se preservan. Por ejemplo en el caso de que f sea una función racional, el conjunto $J(f)$ no va a resultar en general acotado, ver [Beardon].

El complemento del conjunto de Julia se denomina el *conjunto de Fatou* y se denota $F(f)$. Algunas propiedades del conjunto de Fatou, se comprueban fácilmente al ser el complemento del conjunto de Julia: es abierto y es invariante hacia adelante y hacia atrás.

Ejemplo 3: Sea la función $f(z)=z^2$. Los puntos periódicos de f son los z tales que $z^{2^n}=z$, si $z\neq 0$ entonces $z^{2^n-1}=1$, de donde resulta que z es una raíz de la unidad y $|z|=1$. Falta ver que son repelentes, tenemos que $f^n(z)=z^{2^n}$, entonces resulta $(f^n)'(z)=2^n z^{2^n-1}$, donde vemos que $|(f^n)'(z)|=2^n|z|^{2^n-1}=2^n>1$. En el caso $z=0$, se puede comprobar que es un punto fijo superatractivo y por lo tanto no pertenece al conjunto de Julia. Luego tenemos que $J(f)\subseteq\{z\in C/|z|=1\}$, tomando la clausura de estos puntos se puede probar que $J(f)=\{z\in C/|z|=1\}$.

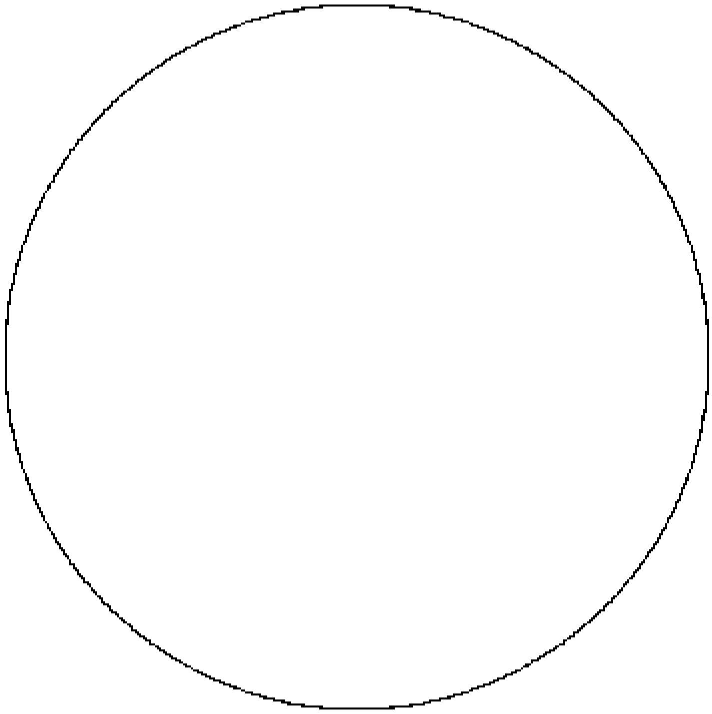

Figura 1: Conjunto de Julia de $f(z)=z^2$

Si intentamos usar esta definición para calcular el conjunto de Julia de un polinomio cualquiera, vamos a encontrarnos con una serie de inconvenientes. Por ejemplo si $\deg(f)=d\geq 2$, para encontrar los puntos p-periódicos tenemos que resolver $f^p(z)=z$, que es una ecuación de grado d^p. Por ejemplo si tenemos un polinomio de grado 2, $d = 2$ y si queremos calcular los puntos 3-periódicos, resulta que $p = 3$. Tenemos que buscar las raíces de un polinomio de grado $2^3 = 8$. Esto es un poco complicado, y además vamos a tener como mucho 8 puntos, que para el gráfico de un conjunto son demasiado pocos.

El siguiente teorema nos da otra forma de calcular el conjunto de Julia de un polinomio f.

Teorema 1: Si $z \in J(f)$, entonces $J(f) = cl\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(z)\right)$. (Esto nos dice que $J(f)$ es un conjunto atractivo de f^{-1})

Una demostración de este teorema se puede encontrar en [Falconer].

Este teorema nos permite, usando una computadora, dibujar el conjunto de Julia de un polinomio.

Podemos proceder del siguiente modo: buscamos un punto fijo de f, o sea resolver $f(z) = z$. Nos aseguramos que sea un punto repelente, o sea que $|f'(z)| > 1$. Entonces este punto está en el conjunto de Julia de f. Sea ahora $Z_0 = \{z_0\}$. En el paso k tenemos el conjunto Z_{k-1}, tomamos cada punto $z \in Z_{k-1}$ y calculamos sus preimágenes, o sea los $w \in C$ tales que $f(w) = z$. El conjunto de todas las preimágenes será Z_k. Repetimos hasta calcular una cantidad suficiente de puntos, y entonces dibujamos.

Veamos algunos resultados de este algoritmo:

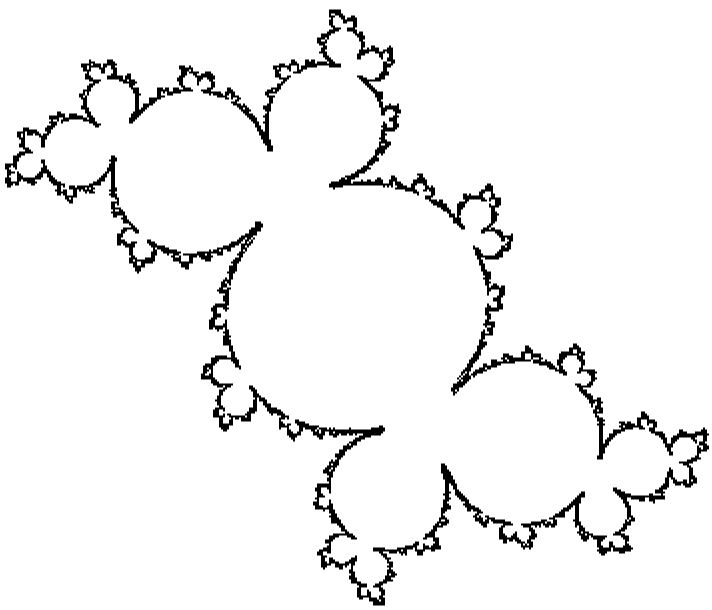

Figura 2: El conjunto de Julia de la función $f(z) = e^{\frac{2\pi i}{3}} z + z^2$

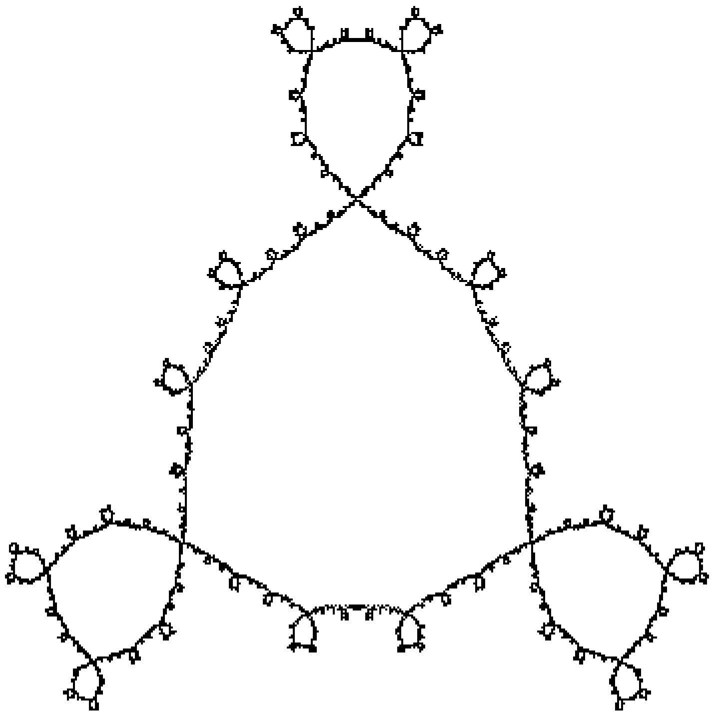

Figura 3: Conjunto de Julia de la función $f(z) = z^3 - i$

Este procedimiento presenta algunos problemas, por ejemplo la cantidad de puntos a almacenar aumenta de manera exponencial con el número de pasos. Otro problema más serio es que, dependiendo del polinomio, los puntos tienden a permanecer en una zona determinada, dejando otras zonas despobladas, por lo tanto no vamos a obtener un dibujo demasiado realista.

Veamos otras alternativas para definir el conjunto de Julia

Definamos algunos conjuntos antes de seguir. Sea w un punto fijo atractivo de f (es decir $f(w) = w$ y $|f'(w)| < 1$), definimos $A(w) = \{z \in C / f^n(z) \to w\}$, se denomina el *conjunto de atracción de* w. Cuando f es un polinomio, se puede considerar a $z = \infty$, como un punto atractivo y definimos entonces $A(\infty) = \{z \in C / f^n(z) \to \infty\}$.

Entonces tenemos el siguiente teorema.

Teorema 2: Para cualquier w, punto fijo atractivo, entonces $J(f) = fr(A(w))$ (aquí $fr(U)$ es la frontera del conjunto U. Es decir si $z \in J(f)$, existen z_1 y z_2 arbitrariamente cerca de z, tales que $f^n(z_1) \to w$ y $f^n(z_2) \not\to w$.

Esto nos da otra forma de calcular el conjunto de Julia cuando f es un polinomio. En ese caso $z = \infty$ es un punto atractivo y como $J(f)$ es un conjunto acotado resulta que si un punto z está en el conjunto de Julia de f, entonces podemos encontrar puntos w_1 y w_2

arbitrariamente cerca de z, tales que $f^n(w_1) \to \infty$ y $f^n(w_2) \not\to \infty$ o sea que $\left|f^n(w_2)\right|$ permanece acotado para todo n.

Este teorema constituye una de las bases de los programas que grafican fractales. La mayoría de estos programas grafican lo que se denomina el *conjunto de Julia lleno*. Para un z dado, iteran una cantidad suficiente de veces la función f, hasta asegurarse de que $f^n(z) \to \infty$ y colorean el punto de acuerdo al número de iteraciones necesarias. Si después de un número grande de iteraciones no pueden asegurar que $f^n(z) \to \infty$ el punto hipotéticamente pertenece a $J(f)$ y se pinta de negro.

Para definir el conjunto de Mandelbrot nos va a interesar una clase particular de polinomios: Definimos $f_c(z) = z^2 + c$ y su conjunto de Julia correspondiente como $J_c = J(f_c)$. Ahora podemos pasar a

El conjunto de Mandelbrot

Se define el *conjunto de Mandelbrot* como:

$$\mathcal{M} = \{c \in C \,/\, J_c \text{ es conexo}\}.$$

Para una definición formal de cuando un conjunto es conexo pueden ver cualquier libro de topología. De manera intuitiva un conjunto A es conexo si no se puede separar en dos piezas disjuntas.

Esta definición formal no es demasiado útil cuando queremos calcular el conjunto $\mathcal{M}$. Pero tenemos algunas definiciones alternativas.

Teorema 3: Tenemos que

$$\mathcal{M} = \{c \in C \,/\, f_c^n(0) \not\to \infty\}$$

y

$$\mathcal{M} = \{c \in C \,/\, \left|f_c^n(0)\right| \le 2 \ \forall n\}.$$

La demostración se puede ver en [Falconer]. Es un hecho remarcable el que el comportamiento de la función f_c, esté determinado por su comportamiento en $z = 0$. Para ver que esto no es azaroso sino que hay una razón detrás de ello pueden consultar [Beardon].

Veamos, usando este último teorema que si $|c| > 2$, entonces resulta que $f_c^n(0) \to \infty$, probaríamos entonces que J_c es disconexo. Como tenemos que $f_c(0) = c$, o sea que $\left|f_c(0)\right| = |c| > 2$, luego J_c es disconexo si no contradecimos el hecho de que $\left|f_c^n(0)\right| \le 2 \ \forall n$.

Usando este teorema podemos encontrar algunos de los puntos que están en $\mathcal{M}$. Por ejemplo si tomamos $c = i$, tenemos que $f_c(0) = i$, $f_c^2(0) = -1 + i$, $f_c^3(0) = -i$, $f_c^4(0) = -1 + i$ y a partir de aquí se repite la secuencia, luego J_i es un conjunto conexo. Tomando $c = -2$, tenemos que $f_c(0)=-2$, $f_c^2(0)=2$, $f_c^3(0)=2$, …, luego J_{-2} es conexo. Tomando $c=1$, tenemos que $f_c(0)=1$, $f_c^2(0)=2$, $f_c^3(0)=5$ y entonces J_1 es disconexo.

Si tomamos $c=0.99i$, podemos comprobar que $\left|f_c^8(0)\right|>2$, luego $J_{0.99i}$ es disconexo, si empezamos a tomar valores c arbitrariamente cerca de i, vamos a comprobar que para cada uno su conjunto de Julia, J_c es disconexo. Esto nos lleva a formularnos la pregunta de si $c=i$ es un punto aislado de $\mathcal{M}$, o sea si $\mathcal{M}$ es un conjunto conexo o no. La sorprendente respuesta a esta cuestión es que $\mathcal{M}$ es un conjunto conexo, ver [Beardon] para una demostración.

Veamos una imagen del conjunto de Mandelbrot.

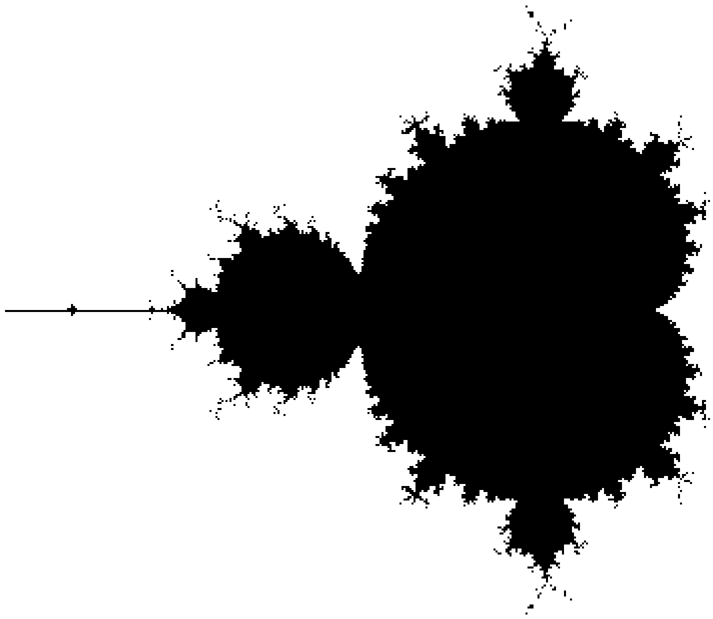

Figura 4: El conjunto de Mandelbrot

La mayoría de los dibujos del conjunto de Mandelbrot, suelen aparecer coloreados según la velocidad con que cada punto converja a infinito.

El algoritmo para dibujar el conjunto de Mandelbrot es el siguiente: para cada punto c, iteramos la función f_c un número suficiente de veces, si permanece acotada por 2, entonces razonablemente podemos suponer que c se encuentra en el conjunto de Mandelbrot.

En el gráfico siguiente podemos ver la relación entre el conjunto de Mandelbrot y los conjuntos de Julia.

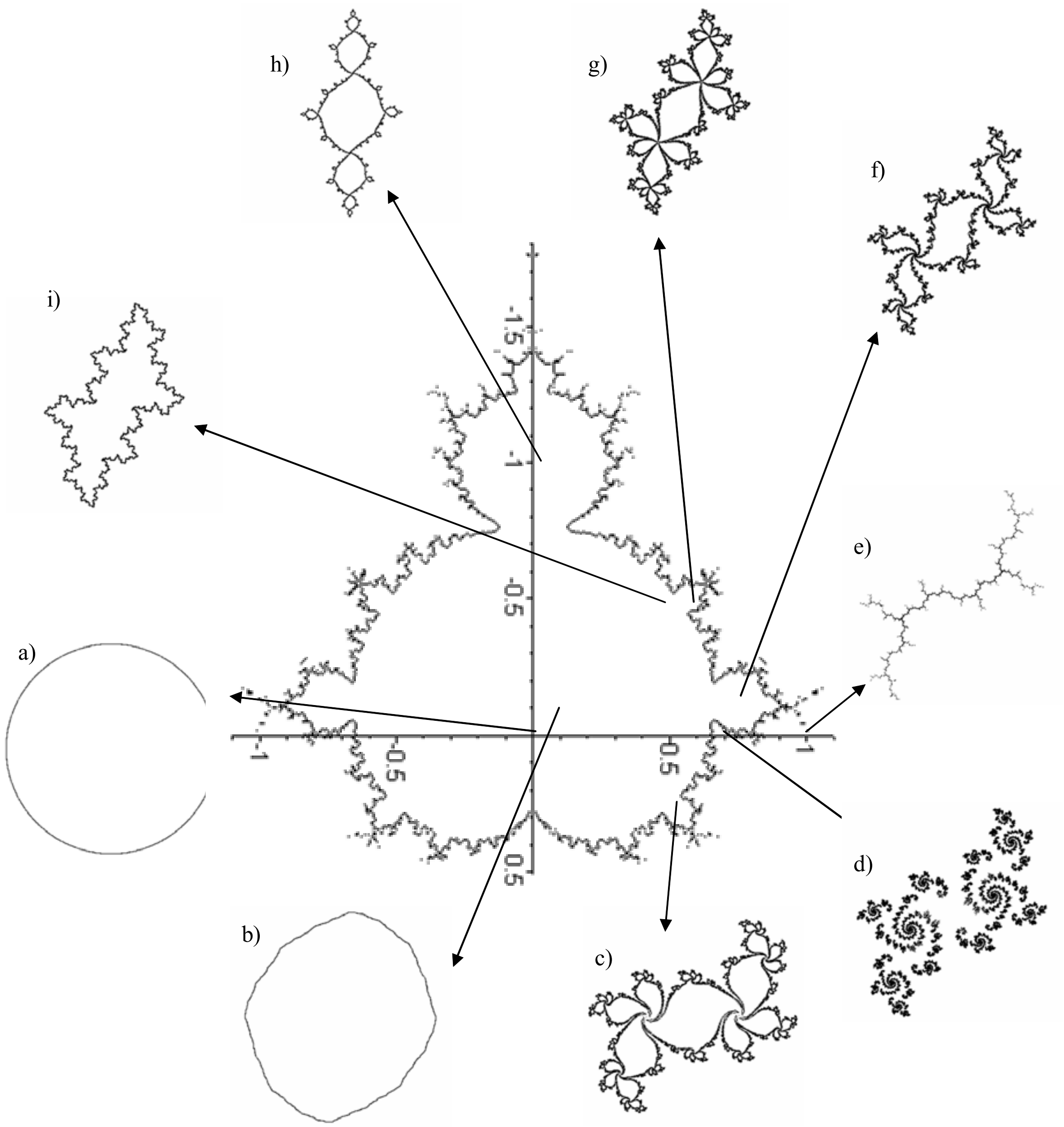

Figura 5: Relación entre $\mathcal{M}$ y J_c.

Veamos a qué valores de c corresponde cada gráfico:
a) corresponde a $c = 0$, b) $c = -0.1 + 0.1i$, c) $c = 0.25 + 0.52i$, d) $c = 0.68i$, e) $c = i$, f) $c = -0.2 + 0.75i$, g) $c = -0.5 + 0.55i$, h) $c = -1 + 0.05i$ y i) $-0.5 + 0.5i$.

Mirando con atención podemos apreciar algunos rasgos característicos de los conjuntos: a), b) y i) están dentro del bulbo principal de $\mathcal{M}$ y sus gráficos se correspondes a curvas cerradas simples. En cambio h) está en el bulbo secundario, su gráfico no es una curva cerrada simple, pero en cada punto de contacto une dos regiones. En cambio f) c) y g) que se encuentran dentro de bulbos más pequeños, en cada punto de contacto unen tres, cuatro y cinco regiones. El gráfico de d) está fuera del conjunto de Mandelbrot y es entonces totalmente disconexo. Finalmente e) tiene la forma de una dendrita, esto es debido a que se encuentra en uno de los 'cabellos' de $\mathcal{M}$.

Comentarios finales

La principal motivación para escribir este trabajo es la escasez de material adecuado sobre conjuntos de Julia disponible. El simple objetivo de este trabajo es servir de introducción al mundo de los conjuntos fractales, desde un punto de vista práctico. Es decir, que con las herramientas adecuadas se pueda seguir experimentando.

Como recomendación final, si quieren profundizar en estos temas les sugiero cualquiera de los libros citados más abajo, además en ellos encontrará abundantes referencias a otros trabajos. Cabe mencionar la página de M.C. Macclure, bastante completa y de las mejores, de ella he tomado los algoritmos necesarios para ilustrar este trabajo; si su interés principal son los algoritmos deberían visitar esta página.

Material Consultado

K. Falconer: "Fractal Geomtry: Mathematical Foundations and Applications", 1990.
A. F. Beardon: "Iteration of Rational Function", GTM vol. 32, SpringerVerlag, 1991.
M. McClure: "Julia Sets", http://www.unca.edu/~mcmcclur/mathematicaGraphics/Julia

http://www.rinconmatematico.com