§ 3. **El número *e***

Desigualdades Cap I

Korovkin

El número e desempeña un papel importante en las matemáticas. Daremos su definición después de resolver una serie de problemas en los que se aplica solamente el teorema 2 (ver **§ 2)**

Problema 1. Demostrar que cualquiera que sean los números positivos a, b $(a \neq b)$, es válida la desigualdad

$$\sqrt[n+1]{ab^n} \le \frac{a+nb}{n+1}$$

Solución. Tenemos

$$\sqrt[n+1]{ab^n} = \sqrt[n+1]{a.b.b\ldots b} = \frac{a+\overbrace{b+b+\ldots+b}^{n}}{n+1} = \frac{a+nb}{n+1}$$

que es lo que se quería demostrar ■

Problema 2. Demostrar que a medida que aumenta n, también aumentan las magnitudes

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad \text{y} \qquad z_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n,$$

o sea, que

$$x_n < x_{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \qquad \text{y} \qquad z_n < z_{n+1} = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Solución:

Tomando $a=1$ y $b = 1+\frac{1}{n}$ en la desigualdad del problema anterior, encontramos

$$\sqrt[n+1]{1.\left(1+\frac{1}{n}\right).\left(1+\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n}\right)} < \frac{1+n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1} = \frac{1+n+1}{n+1} = 1+\frac{1}{n+1}$$

Elevando ambos miembros de esta desigualdad a la potencia $(n+1)$ tendremos

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1},$$

o sea, $x_n < x_{n+1}$.

La segunda desigualdad se demuestra análogamente ■

Problema 3. Demostrar que $y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ decrece a medida que aumenta n, o sea,

$$y_n > y_{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}$$

Solución. Tenemos

$$y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} = \frac{1}{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}} = \frac{1}{z_{n+1}}$$

(véanse las notaciones del problema 2). Como z_n aumenta a medida que aumenta n, resulta que y_n decrece ■

El número e

En los problemas 2 y 3 hemos demostrado que

$$x_1 = \left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2 < x_2 = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 2,25 < x_3 < \ldots < x_n < \ldots,$$

$$y_1 = \left(1+\frac{1}{1}\right)^2 = 4 > y_2 = \left(1+\frac{1}{2}\right)^3 = 3,375 > y_3 > \ldots > y_n > \ldots$$

Por otra parte,

$$2 = x_1 < x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = y_n < y_1 = 4$$

Luego, la variable x_n satisface dos condiciones:

1) x_n crece monótonamente a medida que aumenta *n*;
2) x_n es una variable acotada ($2 < x_n < 4$).

Es conocido que toda variable acotada y monótona creciente tiene límite. Por lo tanto, existe el límite de la variable x_n. Este límite se designa por la letra *e*, o sea,

$$e = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Como quiera que la variable x_n tiende a su límite aumentando, resulta que x_n es menor que su límite, o sea

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e \qquad (8)$$

Es fácil ver que $e < 3$. En efecto, si n es grande, tenemos

$$x_n < y_n < y_5 = \left(1+\frac{1}{5}\right)^6 = 2,985984$$

Por lo tanto, también

$$e = \lim_{n\to\infty} x_n \leq 2,985984 < 3$$

El número e, al igual que el número π, desempeña un papel importante en matemática. Se emplea, por ejemplo, como base de logaritmos denominados *logaritmos naturales*. El logaritmo del número N respecto a la base e se representa simbólicamente por $\ln N$ (y se lee así: logaritmo natural de N).
Se sabe que los números e y π son irracionales. Cada uno ha sido ya calculado con *808* signos decimales; se tiene

$$e = 2,7182818285490\ ...$$

Demostremos ahora que el límite de la variable y_n es también igual a e. En efecto,

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e.1 = e$$

Puesto que y_n decrece a medida que se aproxima a e (véase el problema 2) , resulta que

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > e \qquad (9)$$

Problema 4. Demostrar la desigualdad

$$n! > \left(\frac{n}{e}\right)^n \qquad (10)$$

Solución. Demostraremos la desigualdad (10) aplicando el método de inducción matemática. Es fácil comprobarla para $n = 1$. En efecto,

$$1! = 1 > \left(\frac{1}{e}\right)^1$$

Supongamos ahora que la desigualdad (10) se cumple para $n = k$, o sea,

$$k! > \left(\frac{k}{e}\right)^k$$

Multiplicando por $k+1$ ambos miembros de esta última desigualdad, obtenemos

$$(k+1)! = (k+1)k! > \left(\frac{k}{e}\right)^k (k+1) = \left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1} \frac{e}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k}$$

Pero, según la desigualdad (8), tenemos

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^k < e$$

y, por eso,

$$(k+1)! > \left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1} \frac{e}{e} = \left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1}$$

es decir, hemos demostrado la desigualdad (9) para $n = k+1$. Con esto, la desigualdad (9) queda demostrada para todo valor de *n*.

Puesto que $e < 3$, de la desigualdad (9) se deduce que

$$n! > \left(\frac{n}{3}\right)^n.$$

Empleando la última desigualdad es fácil demostrar que

$$300! > 100^{300}$$

En efecto, tomando $n = 300$, obtenemos

$$300! > \left(\frac{300}{3}\right)^{300} = 100^{300}$$

.

De la misma forma que ha sido demostrada la desigualdad del problema 4, se puede demostrar esta otra:

$$n! < e\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}$$