Un teorema de Pringsheim

Compárese la prueba de este teorema con la prueba
de la divergencia de la serie armónica

Sea a_n una sucesión de números positivos y decreciente tal que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es convergente.

Entonces

$$na_n \to 0$$

Demostración. Pongamos $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. La convergencia de la serie significa que la sucesión de sumas parciales S_n tiene un límite finito, digamos S . O sea,

$$S_n \to S$$

También para la subsucesión de sumas parciales pares se tiene

$$S_{2n} \to S$$

En consecuencia,

$$S_{2n} - S_n \to S - S = 0$$

o sea

$$a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{2n} \to 0$$

En esta última suma los índices son $n+1,\ n+2,\ n+3,\ \ldots,\ n+n$, lo que nos muestra que hay n sumandos.

Entonces la suma es mayor que n veces el sumando más chico, que es a_{2n} (recuérdese que la sucesión a_n es decreciente) , o sea

$$na_{2n} < a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{2n}$$

y como los términos son todos positivos, se tiene

$$0 < na_{2n} < a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{2n}$$

Ahora na_{2n} queda encerrada por dos sucesiones que tienden a cero, por lo que $na_{2n} \to 0$.

Desde luego, también

$$2na_{2n} \to 0 \qquad (1)$$

por otra parte, como $a_{2n+1} \le a_{2n}$, se tiene que

$$0 < na_{2n+1} \le na_{2n}$$

Nuevamente podemos asegurar que

$$na_{2n+1} \to 0$$

Además

$$(2n+1)a_{2n+1} = \frac{2n+1}{n} n a_{2n+1},$$

y como $\frac{2n+1}{n} \to 2$ y $n a_{2n+1} \to 0$, resulta

$$(2n+1)a_{2n+1} \to 0 \qquad (2)$$

Con (1) y (2) vemos que tienden a cero tanto la subsucesión de los pares como la subsucesión de los impares, y en consecuencia tiende a cero la sucesión entera:

$$n a_n \to 0 \qquad \text{c.q.d.}$$

.

Nota: Es un ejercicio sencillo e instructivo demostrar que

$$a_{2n} \to L \ \text{ y } \ a_{2n+1} \to L \ \Rightarrow \ a_n \to L$$

Conclusión válida tanto para límite finito como para límite infinito.

Ejercicio. Probar la divergencia de

$$\sum \frac{1}{ak+b} \quad a > 0,\ b \in \mathbb{R} \ \text{ y de } \ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

Donde la primera suma se inicia tomando *n* suficientemente avanzado como para que el denominador sea positivo.