Parte entera del número
Desigualdades Cap I
Korovkin

La parte entera del número x*, designada por* $[x]$*,* es el mayor número entero que no sobrepasa x.
De esta definición resulta que siempre

$$[x] \leq x,$$

pues la parte entera no sobrepasa x. Por otro lado, como $[x]$ es el mayor número entero que cumple esta desigualdad, tenemos que

$$[x] + 1 > x$$

.
Por lo tanto, $[x]$ es el número entero que cumple las desigualdades

$$[x] \leq x < 1 + [x]$$

Por ejemplo, de las desigualdades

$$3 < \pi < 4 \qquad 5 < \frac{17}{3} < 6 \qquad -2 < -\sqrt{2} < -1 \qquad 5 = 5 < 6$$

resulta que

$$[\pi] = 3 \qquad \left[\frac{17}{3}\right] = 5 \qquad [-\sqrt{2}] = -2 \qquad [5] = 5$$

En los cálculos aproximados es muy importante saber determinar la parte entera de una magnitud. En efecto, si conocemos la parte entera de una magnitud x, podemos tomar $[x]$ o bien $1 + [x]$ como valor aproximado de la magnitud x cometiendo un error que no pasa de la unidad, pues

$$0 \leq x - [x] < 1 + [x] - [x] = 1$$

$$0 < 1 + [x] - x \leq 1 + [x] - [x] = 1$$

Es más, el hecho de conocer la parte entera de una magnitud permite hallar fácilmente su valor con un error que no pasa de $\frac{1}{2}$. Ese valor aproximado puede tomarse igual a $[x] + \frac{1}{2}$.
Señalemos por último que conociendo la parte entera de un número podemos determinar éste con cualquier grado de exactitud.

Efectivamente, puesto que

$$[Nx] \leq Nx < 1 + [Nx]$$

tenemos

$$\frac{[Nx]}{N} \leq x < \frac{[Nx]}{N} + \frac{1}{N}$$

es decir, el número

$$\frac{[Nx]}{N} + \frac{1}{2N}$$

difiere del número x en $\frac{1}{2N}$ todo lo más. Si N es grande, el error será pequeño.

En los problemas que siguen se determina la parte entera de algunos números.

Problema 1. Hallar la parte entera del número

$$x = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Solución. Emplearemos las desigualdades

$$1 \leq 1 \leq 1$$

$$0,7 < \sqrt{\frac{1}{2}} < 0,8$$

$$0,5 < \sqrt{\frac{1}{3}} < 0,6$$

$$0,5 \leq \sqrt{\frac{1}{4}} \leq 0,5$$

$$0,4 < \sqrt{\frac{1}{5}} < 0,5$$

(que se obtienen calculando las raíces, por defecto y por exceso, en menos de $0,1$). Sumando estas desigualdades, encontramos

$$1 + 0,7 + 0,5 + 0,5 + 0,4 < x < 1 + 0,8 + 0,6 + 0,5 + 0,5$$

o sea,

$$3,1 < x < 3,4$$

y, por consiguiente, $[x] = 3$.

Notemos, con relación a este ejemplo, que el número $3,25$ difiere de x en $0,15$ todo lo más.

Problema 2. Hallar la parte entera del número

$$y = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + ... + \frac{1}{\sqrt{1\ 000\ 000}}$$

Solución. La única diferencia entre este problema y el anterior es el número de sumandos: en el primer problema eran 5 y ahora son $1\ 000\ 000$. Pero esta circunstancia hace imposible la aplicación práctica del método de solución anterior.
Para resolver el problema analicemos la suma

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}$$

Con esta finalidad demostraremos las desigualdades

$$2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n} \ < \ \sqrt{\frac{1}{n}} \ < \ 2\sqrt{n}-2\sqrt{n-1} \qquad (1)$$

En efecto, puesto que

$$2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n} \ = \ \frac{2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

y puesto que

$$\sqrt{n+1} > \sqrt{n}$$

tenemos

$$2\sqrt{n+1} \ - \ 2\sqrt{n} \ < \ \frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n}} \ = \ \frac{2}{2\sqrt{n}} \ = \ \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Hemos demostrado la primera de las desigualdades (1) ; la segunda se demuestra de un modo análogo.

Si en las desigualdades (1) tomamos $n = 2,3,4,...,n$, obtenemos

$$2\sqrt{3}-2\sqrt{2} < \frac{1}{\sqrt{2}} < 2\sqrt{2}-2$$

$$2\sqrt{4}-2\sqrt{3} < \frac{1}{\sqrt{3}} < 2\sqrt{3}-2\sqrt{2}$$

$$2\sqrt{5}-2\sqrt{4} < \frac{1}{\sqrt{4}} < 2\sqrt{4}-2\sqrt{3}$$

. . . .

$$2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}-2\sqrt{n-1}$$

Sumemos ahora estas desigualdades:

$$2\sqrt{n+1}-2\sqrt{2} < \frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}-2$$

Agregando 1 a todas las desigualdades obtenidas encontramos

$$2\sqrt{n+1}-2\sqrt{2}+1 < 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}-1 \qquad (2)$$

Puesto que $2\sqrt{2} < 3$ y $\sqrt{n+1} > \sqrt{n}$, de las desigualdades (2) se deduce que

$$2\sqrt{n}-2 < 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}-1 \qquad (3)$$

Empleando las desigualdades (3) es fácil encontrar ahora la parte entera del número

$$y = 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{1\ 000\ 000}}$$

En efecto, si en las desigualdades (3) tomamos $n = 1\ 000\ 000$, tendremos

$$2\sqrt{1\ 000\ 000}-2 < 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{1\ 000\ 000}} < 2\sqrt{1\ 000\ 000}-1$$

o sea,

$$1\ 998 < y < 1\ 999$$

Por consiguiente, $[y] = 1\ 998$.

De las desigualdades (2) , se deduce que el número $1998,6$ difiere de y en $0,4$ todo lo más..

Por lo tanto, hemos calculado el número y en menos del $\frac{40}{1998,4}\% \approx 0,02\%$.

Los números 1998 y 1999 difieren del número y a lo sumo en la unidad, y el número $1998,5$ en $0,5$ todo lo más.

Analicemos ahora un problema de otra índole.

Problema 3. Demostrar la desigualdad

$$x = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100} < \frac{1}{10}$$

Solución. Pongamos

$$y = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{100}{101}$$

Puesto que

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{3}; \qquad \frac{3}{4} < \frac{4}{5}; \qquad \frac{5}{6} < \frac{6}{7}; \qquad \frac{99}{100} < \frac{100}{101}$$

resulta que $x < y$ y, por consiguiente,

$$x^2 < xy = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{99}{100} \cdot \frac{100}{101} = \frac{1}{101}$$

extrayendo la raíz cuadrada de ambos miembros de esta desigualdad, encontramos

$$x < \frac{1}{\sqrt{101}} < 0{,}1$$

Ejercicios.

1. Demostrar las desigualdades

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{m} < \frac{1}{\sqrt{m}} + \frac{1}{\sqrt{m+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{m-1}$$

2. Demostrar las desigualdades

$$1800 < \frac{1}{\sqrt{10000}} + \frac{1}{\sqrt{10001}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{1\ 000\ 000}} < 1800{,}02$$

3. Hallar $[50z]$ si

$$z = \frac{1}{\sqrt{10000}} + \frac{1}{\sqrt{10001}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{1\ 000\ 000}}$$

Respuesta. $[50z] = 90\ 000$

4. Aplicando la inducción matemática, demostrar la desigualdad

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$$

5. Demostrar la desigualdad

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{99}{100} < \frac{1}{12}$$