La divergencia de la serie armónica
prueba corta

Compárese con la estrategia empleada
para probar el criterio de Pringsheim

La prueba se hará por reducción al absurdo. Supóngase que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ es convergente. Por definición, ello significa que sus sumas parciales $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ forman una sucesión con límite finito, digamos S. Más precisamente:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \quad (S \in \mathbb{R})$$

Ahora bien, si $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, también lo mismo es cierto para la subsucesión de las sumas parciales de índice par: $\lim_{n\to\infty} S_{2n} = S$, por lo cual, y gracias a nuestra suposición de que S es un número real, podemos restar sin problemas, y obtener

$$\lim_{n\to\infty} \left(S_{2n} - S_n \right) = S - S = 0 \quad ^{(*)}$$

Llegaremos a una contradicción contra este último límite, lo que nos probará que la sucesión estudiada no es sumable.

Veamos la siguiente "escena de sumatoria explícita":

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}$$

Con lo que el resultado anterior se expresa

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right) = 0$$

La siguiente acotación será reveladora: la suma

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}$$

(*) Obsérvese que en caso de ser $S = +\infty$, hubiésemos tenido una resta con forma indeterminada $+\infty - (+\infty)$.

de n sumandos[**], es mayor que n veces el sumando más chico, que es $\frac{1}{2n}$ (el último sumando) . Más precisamente

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n} \;>\; \underbrace{\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}}_{n \text{ sumandos}} \;=\; n\frac{1}{2n} \;=\; \frac{1}{2}$$

Reuniendo estos resultados,

$$S_{2n}-S_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}>\frac{1}{2}$$

$$S_{2n}-S_n>\frac{1}{2},$$

lo que va en contra de $\lim_{n\to\infty}\left(S_{2n}-S_n\right)=0$.

El absurdo provino de suponer que las sumas parciales tenían límite finito. Por lo tanto, la serie de los recíprocos de los naturales no es convergente.

[**] Viendo que los denominadores son $n+1,\ n+2,\ n+3,\ \ldots,\ n+n$, el recorrido del segundo sumando de cada uno de estos números nos muestra que hay un total de n sumandos.